Analyse 4 - Analyse asymptotique

1 Comparaison asymptotique des suites

1.1 Domination et négligeabilité

Notations ($\mathcal{O}(1)$ et $o(1)$)**.** *Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On note :*

- $\boxed{u_n = \mathcal{O}(1) \text{ si } u \text{ est } \textbf{\textit{bornée.}}}$

  On lit "u_n est un grand $\mathcal{O}$ de 1."

- $\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(1) \text{ si } u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.}$

  On lit "u_n est un petit o de 1." Autres notations : $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(1)$ ou $u_n = o(1)$

Cf exo 1

Définition. *Soient u et v deux suites réelles.*

- *La notation $u_n = \mathcal{O}(v_n)$ signifie $u_n = v_n \times \mathcal{O}(1)$.*
  *On dit alors que u est **dominée** par v.*
- *La notation $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$ signifie $u_n = v_n \times o(1)$.*
  *On dit alors que u est **négligeable** devant v.*
  Autres notations : $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n)$ ou $u_n = o(v_n)$

Remarques. *Si v ne s'annule pas APCR, alors on a les équivalences suivantes :*

(1) $u_n = \mathcal{O}(v_n) \iff \left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *est bornée.*

(2) $u_n = o(v_n) \iff \frac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Démonstration.

(1) $u_n = \mathcal{O}(v_n) \iff u_n = v_n \times \mathcal{O}(1) \iff \frac{u_n}{v_n} = \mathcal{O}(1).$

(2) $u_n = o(v_n) \iff u_n = v_n \times o(1) \iff \frac{u_n}{v_n} = o(1).$

□

Cf exo 2,3

Proposition (Croissances comparées.)**.**
$\forall \alpha, \beta, \gamma > 0$ *:*

- $(\ln n)^\alpha = o(n^\beta)$ *(puisque le quotient $\frac{(\ln n)^\alpha}{n^\beta}$ tend vers 0)*
- $n^\beta = o(e^{\gamma n})$
- $e^{\gamma n} = o(n!)$

Remarque. *Les suites du type $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $q > 1$ sont une autre manière d'écrire $(e^{\gamma n})_{n\in\mathbb{N}}$. En effet, $q^n = e^{n \ln q}$ et $\ln q > 0$.*

1.2 Équivalents

Théorème/définition. *Soit $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On suppose que v ne s'annule pas APCR. Il y a équivalence entre les trois points suivants :*

(1) $\dfrac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$

(2) $u_n = v_n + o(v_n) = v_n(1 + o(1))$

(3) $v_n = u_n + o(u_n) = u_n(1 + o(1))$

Dans ce cas, on dit que u et v sont ***équivalentes****, et on note* $\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n}$*, ou* $u_n \sim v_n$.

Démonstration. (1) $\iff$ (2) :

$$\left(\frac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1\right) \iff \frac{u_n}{v_n} = 1 + o(1) \iff u_n = v_n(1 + o(1)) \iff u_n = v_n + o(v_n)$$

(1) $\iff$ (3) :

$$\left(\frac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1\right) \iff \left(\frac{v_n}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1\right) \iff \frac{v_n}{u_n} = 1 + o(1) \iff v_n = u_n + o(u_n)$$ □

Remarque. *Si ℓ est un réel* ***non nul****, alors* $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ell$ *signifie très exactement que* $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.

En effet,

$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ell \implies u_n = \ell(1 + o(1)) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$;

$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \implies u_n = \ell + o(1) = \ell(1 + \frac{1}{\ell}o(1)) = \ell(1 + o(1))$.

La notation d'équivalent apporte réellement de la précision pour les suites qui tendent vers 0 ou $\pm\infty$.

Cf exo 4

Remarques.

- *La suite constante à 0 est négl. devant toutes les suites u de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, car $0 = u_n \times 0 = u_n \times o(1) = o(u_n)$.*
- *Aucune suite n'est négligeable devant la suite nulle à part elle-même.*
  En effet, $u_n = o(0)$ signifie $u_n = 0 \times o(1) = 0$.
- *Aucune suite n'est équivalente à la suite nulle à part elle-même.*
  En effet, $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 0$ signifie $u_n = 0 + o(0) = 0$.

Proposition. *Soit $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$. Alors :*

(1) Si u admet une limite ℓ (finie ou infinie), alors v admet la même limite.

(2) APCR, u_n et v_n ont même signe.

Démonstration.

(1) Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$, alors $v_n = u_n + o(u_n) = \underbrace{u_n}_{\to\ell}\underbrace{(1 + o(1))}_{\to 1}$ donc $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.

(2) $\dfrac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ donc APCR, $\frac{u_n}{v_n} > 0$, ce qui implique que u_n et v_n ont même signe.

□

Proposition (Equivalent par encadrement)**.** *Soient $u, a, b \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.*
Si $a_n \leqslant u_n \leqslant b_n$ APCR et $a_n \sim b_n$ alors $u_n \sim a_n$.

Démonstration. Traitons le cas où $a_n > 0$ APRC, qui est le cas qu'on rencontre en pratique. APCR, on a $a_n \leqslant u_n \leqslant b_n$, donc en divisant par a_n :

$$1 \leqslant \frac{u_n}{a_n} \leqslant \underbrace{\frac{b_n}{a_n}}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 1}$$

Par le théorème des gendarmes, $\frac{u_n}{a_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$, ce qui signifie bien : $u_n \sim a_n$. □

Proposition (Opérations sur les équivalents)**.** *Soient* $u, v, a, b \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

(1) Si $\begin{cases} u_n \sim v_n \\ a_n \sim b_n \end{cases}$ *, alors* $u_n a_n \sim v_n b_n$ *et* $\dfrac{u_n}{a_n} \sim \dfrac{v_n}{b_n}$.

(2) Si $\begin{cases} u_n > 0 \\ u_n \sim v_n \end{cases}$ *, alors pour tout* $\alpha \in \mathbb{R}$, $u_n^\alpha \sim v_n^\alpha$ *(En particulier* $\frac{1}{u_n} \sim \frac{1}{v_n}$*).*

(3) Si $u_n = o(v_n)$*, alors :* $v_n + \underbrace{u_n}_{\substack{\text{négl.} \\ \text{devant } v_n}} \sim v_n$.

Démonstration.

(1) $\dfrac{u_n a_n}{v_n b_n} = \underbrace{\dfrac{u_n}{v_n}}_{\to 1} \times \underbrace{\dfrac{a_n}{b_n}}_{\to 1} \longrightarrow 1$ et $\dfrac{u_n/a_n}{v_n/b_n} = \dfrac{u_n}{v_n} \times \dfrac{b_n}{a_n} \longrightarrow 1.$

(2) $\dfrac{u_n^\alpha}{v_n^\alpha} = \left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)^\alpha \longrightarrow 1^\alpha = 1.$

(3) Si $u_n = o(v_n)$, alors $v_n + u_n = v_n + o(v_n) \sim v_n$, par définition d'un équivalent.

□

Remarques.

- *Le point (2) s'applique à un réel* α ***constant*** *! Par exemple,* $u_n \sim v_n$ *n'implique pas du tout que* $u_n^n \sim v_n^n$.
- *Le point (3) est très pratique pour les sommes :*
  exemple : $u_n = 2n^3 - n + 3\ln n$*. On a* $\begin{cases} n = o(n^3) \\ \ln(n) = o(n^3) \end{cases}$ *donc* $u_n \sim 2n^3$.
- ***Attention, on ne somme pas les équivalents ! ! !***
  Exemple : $1 + \frac{1}{n} \sim 1 + \frac{1}{n^2}$ *est vrai, puisque ces deux quantités tendent vers* 1 *et sont donc toutes les deux équivalentes à* 1.
  Mais si on retranche 1*, on obtient* $\frac{1}{n} \sim \frac{1}{n^2}$*, ce qui est* ***FAUX****.*
  D'ailleurs, retrancher 1 *dans* $1 + \frac{1}{n} \sim 1$ *donne* $\frac{1}{n} \sim 0$*, ce qui est* ***encore plus FAUX****.*

Proposition (Simplification des o et $\mathcal{O}$)**.** *On peut "passer aux équivalents à l'intérieur des* o *et* $\mathcal{O}$*".*
Autrement dit :
Si $u_n \sim v_n$*, alors* $\begin{cases} o(u_n) = o(v_n); \\ \mathcal{O}(u_n) = \mathcal{O}(v_n) \end{cases}$.

Démonstration. Si $u_n \sim v_n$, alors $u_n = v_n(1 + o(1))$, donc :

$$o(u_n) = u_n.o(1) = v_n \underbrace{(1 + o(1))o(1)}_{=o(1)} = o(v_n)$$

et

$$\mathcal{O}(u_n) = u_n.\mathcal{O}(1) = v_n \underbrace{(1 + o(1))\mathcal{O}(1)}_{=\mathcal{O}(1)} = \mathcal{O}(v_n)$$

□

Cf exo 5,6

2 Comparaison asymptotique des fonctions

La comparaison asymptotique de deux fonctions peut se faire en $+\infty$ comme pour les suites, mais aussi en $-\infty$, ou au voisinage d'un point a. Dans cette section, I désigne un intervalle non vide et non réduit à un point, et a un élément de I ou une de ses extrémités. Dans cette partie, toutes les fonctions considérées sont définies sur I ou $I \setminus \{a\}$ et supposées non nulles sur $I \setminus \{a\}$ (de sorte que le quotient de deux fonctions est toujours bien défini sur $I \setminus \{a\}$).

Les démonstrations de cette partie sont tout à fait similaires à celles de la partie précédente sur les suites.

Définition.

- *On note* $f(x) \underset{x\to a}{=} \mathcal{O}(1)$ *si* f *est bornée au voisinage de* a.
- *On note* $f(x) \underset{x\to a}{=} o(1)$ *si* $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0$.
- *On note* $f(x) \underset{x\to a}{=} \mathcal{O}(g(x))$ *si* $f(x) = g(x) \times \mathcal{O}(1)$.
  C'est équivalent à dire que le quotient $\frac{f(x)}{g(x)}$ *est borné sur un voisinage de* a.
  Autres notations : $f(x) = \underset{x\to a}{\mathcal{O}}(g(x))$ *;* $f(x) = \mathcal{O}_a(g(x))$ *;* $f = \mathcal{O}_a(g)$.
- *On note* $f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x))$ *si* $f(x) = g(x) \times o(1)$.
  Cela signifie $\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x\to a]{} 0$.
  Autres notations : $f(x) = \underset{x\to a}{o}(g(x))$ *;* $f(x) = o_a(g(x))$ *;* $f = o_a(g)$.
- *On note* $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ *si* $f(x) \underset{x\to a}{=} g(x) \underbrace{(1 + o(1))}_{\xrightarrow[x\to a]{} 1}$. *Ce qui est équivalent à :*
  - $f(x) = g(x) + o(g(x))$
  - $g(x) = f(x) + o(f(x))$
  - $\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x\to a]{} 1$.

  Autres notations : $f(x) \sim_a g(x)$ *;* $f \sim_a g$.

Proposition (Propriétés des équivalents)**.**

(1) Si $f \sim_a g$ *alors, si* $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell \in \bar{\mathbb{R}}$, $g(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$.

(2) Si $f \sim_a g$*, alors* f *et* g *sont strictement de même signe sur un voisinage de* a.

(3) Si $\begin{cases} f \sim_a g \\ u \sim_a v \end{cases}$ *alors* $f \times u \sim_a g \times v$ *et* $\frac{f}{u} \sim_a \frac{g}{v}$.

(4) Si $f > 0$ *sur un voisinage de* a *et* $f \sim_a g$*, alors* $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad f^\alpha \sim_a g^\alpha$.

(5) Si $f = o_a(g)$*, alors* $f + g \sim_a g$.

Proposition (Croissances comparées en $+\infty$)**.**
$\forall \alpha, \beta, \gamma > 0$ *:*

- $(\ln x)^\alpha \underset{x\to+\infty}{=} o(x^\beta)$.
- $x^\beta \underset{x\to+\infty}{=} o(e^{\gamma x})$.

Proposition (Croissances comparées en 0^+)**.**

- $\forall \alpha, \beta > 0 : \quad |\ln x|^\alpha \underset{x\to 0^+}{=} o\left(\frac{1}{x^\beta}\right)$, *puisque* $x^\beta |\ln x|^\alpha \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$.
- *Pour tous réels* $\alpha < \beta : \quad x^\beta \underset{x\to 0^+}{=} o(x^\alpha)$, *car* $x^\beta = x^\alpha . \underbrace{x^{\beta-\alpha}}_{\xrightarrow[x\to 0^+]{} 0}$.

Proposition. *Si* $f(x) \sim_a g(x)$, *alors* $\begin{cases} o(f(x)) \underset{x\to a}{=} o(g(x)); \\ \mathcal{O}(f(x)) \underset{x\to a}{=} \mathcal{O}(g(x)) \end{cases}$.

Proposition (Equivalent par encadrement)**.** *Si* f, A *et* B *sont trois fonctions telles que :* $A(x) \leqslant f(x) \leqslant B(x)$ *au voisinage de* a *et* $A(x) \sim_a B(x)$ *alors* $f(x) \sim_a A(x)$.

Cf exo 10,11,12,13

3 Développements limités

3.1 Définition et formule de Taylor-Young

Dans cette partie, on se fixe une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ où I est un intervalle non vide et non réduit à un point et a un réel, soit appartenant à I, soit éventuellement une de ses extrémités.

Définition. *On dit que* f *admet un développement limité d'ordre* $n \in \mathbb{N}$ *en* a *(on notera* f *admet un* $DL_n(a)$*), s'il existe des réels* $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ *tels que*

$$f(a+x) \underset{x\to 0}{=} \lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \cdots + \lambda_n x^n + o(x^n)$$

Cela signifie qu'on peut approcher f *au voisinage de* a *par un* ***polynôme****, avec une précision en* $o(x^n)$.

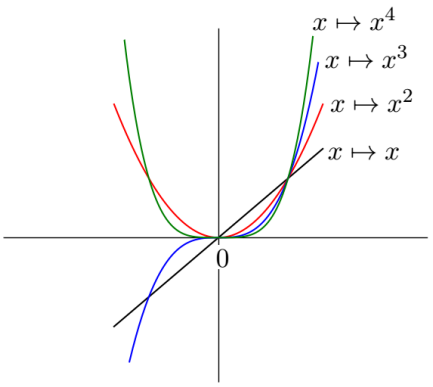
Vocabulaire.

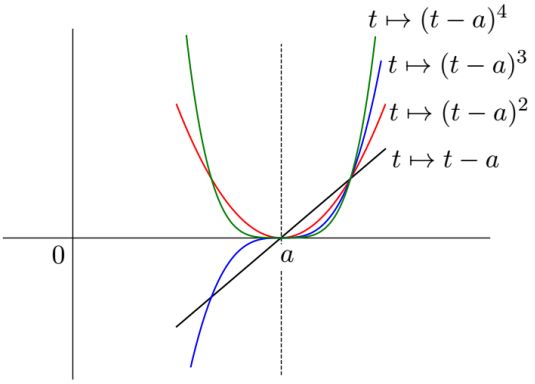
- *La partie polynomiale* $\lambda_0 + \lambda_1 x + \cdots + \lambda_n x^n$ *s'appelle* ***la partie régulière*** *du DL.*
- $o(x^n)$ *s'appelle* ***le reste*** *du DL.*

Remarque. *En faisant le changement de variable* $t = a + x \iff x = t - a$, *cette égalité équivaut à :*

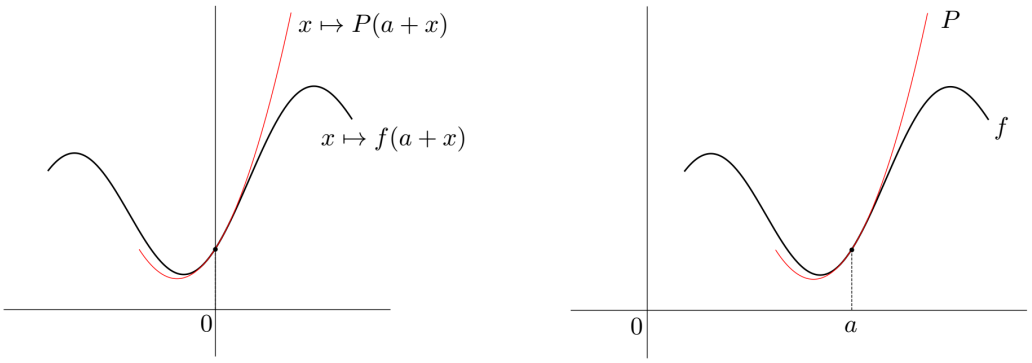
$$f(t) \underset{t\to a}{=} \underbrace{\lambda_0 + \lambda_1(t-a) + \lambda_2(t-a)^2 + \cdots + \lambda_n(t-a)^n}_{P(t)} + o((t-a)^n)$$

Géométriquement, les fonctions $t \mapsto (t-a)^k$ *sont les translations des fonctions* $x \mapsto x^k$, *qui s'annulent en* a *plutôt qu'en* 0.





Le changement de variable permet d'étudier la translation de $f : x \mapsto f(a+x)$ en 0 plutôt que f en a.



Question naturelle : à quelle condition et comment obtenir une telle approximation polynomiale ? On comprend géométriquement que pour que cela fonctionne, il faut que le polynôme P ait le même comportement local que f en a, typiquement la même valeur en a, la même pente, la même courbure, la même variation de courbure, etc.

REMARQUE FONDAMENTALE : construction et définition du polynôme de Taylor.
Fixons $n \in \mathbb{N}$ et cherchons un polynôme P de degré inférieur à n tel que :

$$\begin{cases} P(a) = f(a) & (L_0) \\ P'(a) = f'(a) & (L_1) \\ P''(a) = f''(a) & (L_2) \\ \vdots & \vdots \\ P^{(n)}(a) = f^{(n)}(a) & (L_n) \end{cases}$$

Pour se ramener en 0, on s'intéresse à la fonction polynomiale $x \mapsto P(a+x)$, et l'on cherche donc des coefficients $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}\,,\ P(a+x) = \lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \lambda_3 x^3 + \cdots + \lambda_n x^n \qquad (E_0)$$

- On évalue (E_0) en $x = 0$: $P(a) = \lambda_0$, donc pour que (L_0) soit vérifiée, on pose : $\boxed{\lambda_0 = f(a)}$.
- On dérive (E_0) :

$$\forall x \in \mathbb{R}\,,\ P'(a+x) = \lambda_1 + 2\lambda_2 x + 3\lambda_3 x^2 + \cdots + n\lambda_n x^{n-1} \qquad (E_1)$$

  et on évalue (E_1) en $x = 0$: $P'(a) = \lambda_1$, donc pour que (L_1) soit vérifiée, on pose : $\boxed{\lambda_1 = f'(a)}$.
- On dérive (E_1) :

$$\forall x \in \mathbb{R}\,,\ P''(a+x) = 2\lambda_2 + 3.2.\lambda_3 x + \cdots + n(n-1)\lambda_n x^{n-2} \qquad (E_2)$$

  et on évalue (E_2) en $x = 0$: $P''(a) = 2\lambda_2$, donc pour que (L_2) soit vérifiée, on pose : $\boxed{\lambda_2 = \dfrac{f''(a)}{2}}$.
- On dérive (E_2) :

$$\forall x \in \mathbb{R}\,,\ P^{(3)}(a+x) = 3.2.\lambda_3 + \cdots + n(n-1)(n-2)\lambda_n x^{n-3} \qquad (E_3)$$

  et on évalue (E_3) en $x = 0$: $P^{(3)}(a) = 2.3.\lambda_3$, donc pour que (L_3) soit vérifiée, on pose : $\boxed{\lambda_3 = \dfrac{f^{(3)}(a)}{3!}}$.
- etc...
- On dérive (E_{n-1}) :

$$\forall x \in \mathbb{R}\,,\ P^{(n)}(a+x) = n(n-1)(n-2)\cdots 2 \cdot 1 \cdot \lambda_n = n!\,\lambda_n \qquad (E_n)$$

  et on évalue (E_n) en $x = 0$: $P^{(n)}(a) = n!\,\lambda_n$, donc pour que (L_n) soit vérifiée, on pose : $\boxed{\lambda_n = \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}}$.

Finalement, on obtient un unique polynôme solution du problème, défini par

$$\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R},\ P(a+\boldsymbol{x}) = f(a) + \frac{f^{(1)}(a)}{1!}\boldsymbol{x} + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}\boldsymbol{x^2} + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\boldsymbol{x^n}$$

c'est-à-dire par

$$\forall \boldsymbol{t} \in \mathbb{R},\ P(\boldsymbol{t}) = f(a) + \frac{f^{(1)}(a)}{1!}(\boldsymbol{t}-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(\boldsymbol{t}-a)^{\boldsymbol{2}} + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(\boldsymbol{t}-a)^{\boldsymbol{n}}$$

Ce polynôme est appelé polynôme de Taylor associé à f en a, à l'ordre n.

Théorème (Formule de Taylor-Young)**.**
Si f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur un voisinage de $a \in I$, alors f admet un $DL_n(a)$ donné par :

$$f(a+\boldsymbol{x}) \underset{x\to 0}{=} \underbrace{f(a) + \frac{f^{(1)}(a)}{1!}\boldsymbol{x} + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}\boldsymbol{x^2} + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\boldsymbol{x^n}}_{\text{polynôme de Taylor pris en } a+x} + o(\boldsymbol{x^n})$$

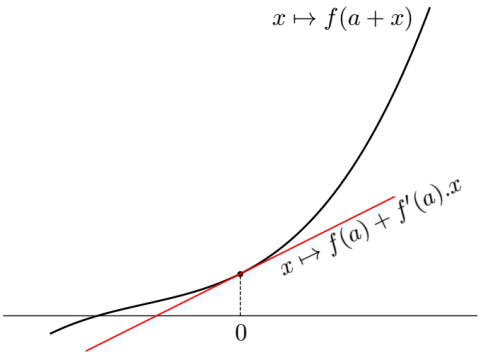
$$\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\boldsymbol{x^k} + o(\boldsymbol{x^n})$$

Autrement dit, le polynôme de Taylor de f (en a à l'ordre n) fournit au voisinage de a une approximation de f à l'ordre n.

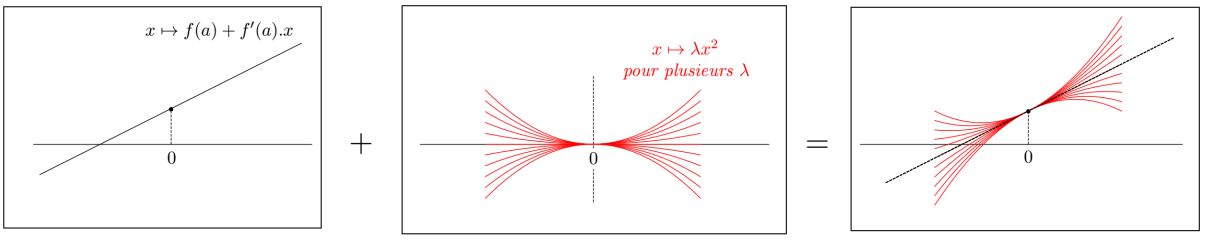
Démonstration. Admise pour l'instant □

Remarques.

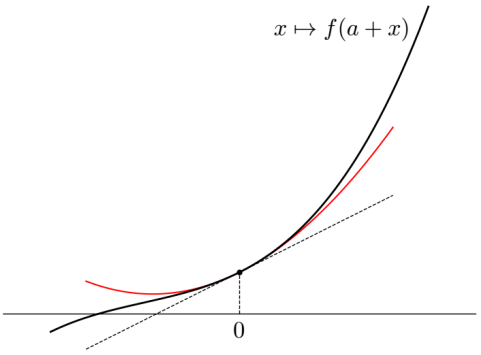
1. *Le théorème donne à la fois une condition suffisante pour l'existence d'un $DL_n(a)$ (f de classe $\mathcal{C}^n$ au voisinage de a) et comment obtenir ce $DL_n(a)$.*
2. *Les premières valeurs de n sont des cas particuliers importants :*
   - *Si $n=0$, le polynôme de Taylor P est simplement la constante à $f(a)$.*
   - *Si $n=1$, $P(t) = f(a) + f'(a)(t-a)$. On reconnaît la tangente de f en a. En outre, le $DL_1(a)$ prévu par le théorème :*
   $$f(a+x) \underset{x\to 0}{=} f(a) + f'(a).x + o(x)$$
   nous fait précisément retrouver la deuxième définition de la dérivabilité de f en a.



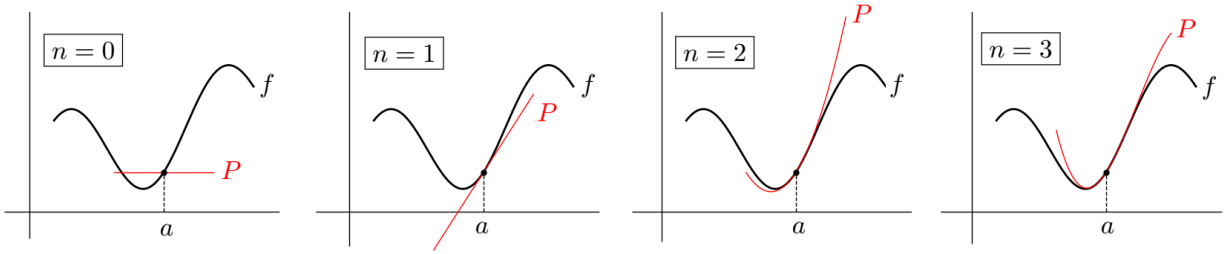
   - *Si $n=2$, P est du type $P(a+x) = \underbrace{f(a) + f'(a).x}_{\text{tangente}} + \lambda x^2$.*



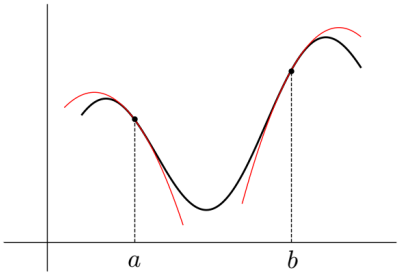
Cette parabole épouse la courbure de f en a pour $\lambda = \frac{f''(a)}{2}$. Le polynôme P a donc même valeur en a, même pente, et même courbure.



3. *Lorsque n augmente, le graphe de P épouse de mieux en mieux celui de f au voisinage de a.*



4. *Les polynômes de Taylor obtenus en un point a n'ont a priori rien à voir avec ceux obtenus pour un autre point b.*

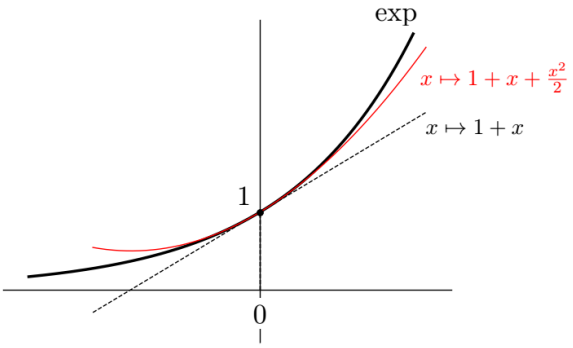


3.2 DL des fonctions usuelles

Fonction exponentielle :

$$\boxed{\exp(x) \underset{x\to 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)}$$

Cette formule permet d'obtenir le $\mathrm{DL}_n(a)$ de exp en tout point a de $\mathbb{R}$, en écrivant $e^{a+x} = e^a.\boxed{e^x}$



Fonctions ch et sh :

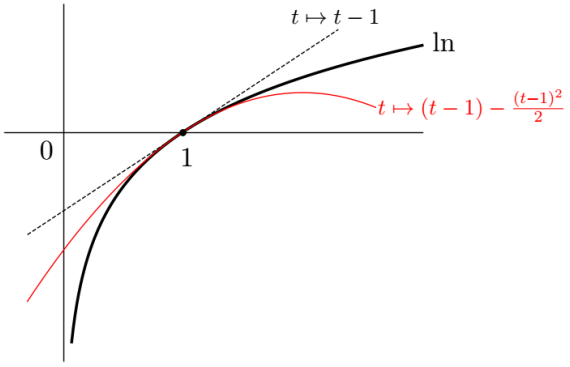
$$\boxed{\mathrm{ch}(x) \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})}$$

$$\boxed{\mathrm{sh}(x) \underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})}$$

Il s'agit respectivement des monômes d'exposants pairs et impairs du DL de la fonction exp.

Fonction logarithme :

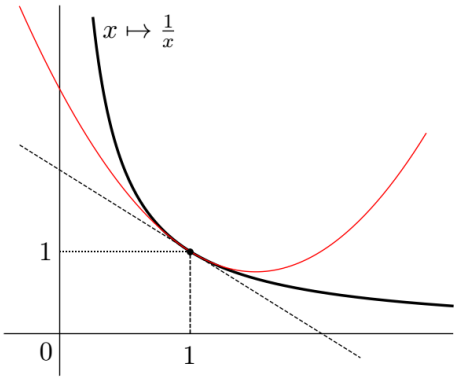
$$\boxed{\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)}$$



Cette formule permet d'obtenir le $\mathrm{DL}_n(a)$ de ln en tout point a de $\mathbb{R}_+^*$, en écrivant
$\ln(a+x) = \ln\left(a \times \left(1+\frac{x}{a}\right)\right) = \ln(a) + \ln\left(1+\frac{x}{a}\right)$
$= \ln(a) + \boxed{\ln(1+X)}$ avec $X = \frac{x}{a}$.

Fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$:

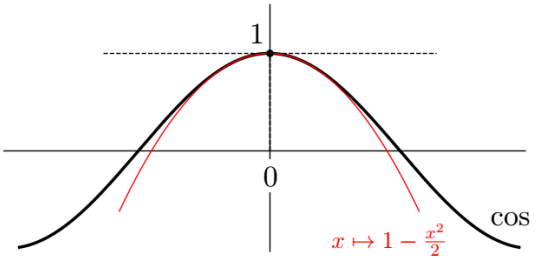
$$\boxed{\frac{1}{1-x} \underset{x\to 0}{=} 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + o(x^n)}$$



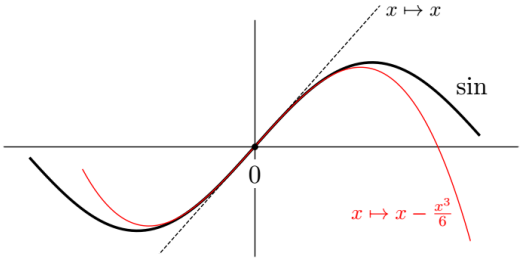
Cette formule permet d'obtenir le $\mathrm{DL}_n(a)$ de $x \mapsto \frac{1}{x}$ en tout point a de $\mathbb{R}^*$, en écrivant
$\frac{1}{a+x} = \frac{1}{a} \times \frac{1}{1-\left(\frac{-x}{a}\right)} = \frac{1}{a} \times \boxed{\frac{1}{1-X}}$ avec $X = \frac{-x}{a}$.

Fonctions cosinus et sinus :

$$\boxed{\cos(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})}$$



$$\boxed{\sin(x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})}$$



Ces formules permettent d'obtenir le $\mathrm{DL}_n(a)$ de cos et sin en tout point a de $\mathbb{R}$ en écrivant les formules d'addition :

$$\cos(a+x) = \cos(a)\boxed{\cos(x)} - \sin(a)\boxed{\sin(x)}$$

Fonctions tan et Arctan :

$$\boxed{\tan(x) \underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + o(x^4)}$$

$$\boxed{\mathrm{Arctan}(x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})}$$

NB : on verra plus loin une démonstration efficace de ces deux formules.

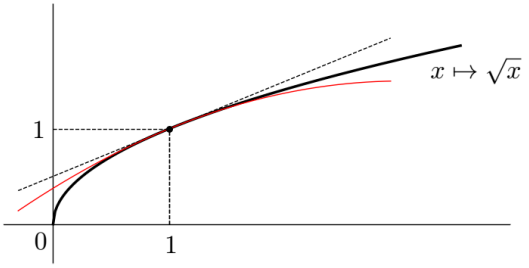
Fonctions $x \mapsto x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{(1+x)^\alpha \underset{x\to 0}{=} 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)}$$

Cette formule permet d'obtenir le $\mathrm{DL}_n(a)$ de $x \mapsto x^\alpha$ en tout point a de $\mathbb{R}_+^*$, en écrivant :

$$\begin{aligned}(a+x)^\alpha = \left(a \times \left(1+\frac{x}{a}\right)\right)^\alpha &= a^\alpha \times \left(1+\frac{x}{a}\right)^\alpha \\ &= a^\alpha \times \boxed{(1+X)^\alpha}\end{aligned}$$

avec $X = \dfrac{x}{a}$.



Equivalents fondamentaux :

$$\boxed{\begin{array}{l}\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x, \quad \ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x, \quad e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x, \quad \tan x \underset{x\to 0}{\sim} x, \\ \arctan x \underset{x\to 0}{\sim} x, \quad \arcsin x \underset{x\to 0}{\sim} x, \quad (1+x)^\alpha - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \alpha x\end{array}}$$

Cf exo 14,15

3.3 Propriétés des DL

Théorème (lien DL - dérivabilité)**.**
Si $a \in I$ et $f : I \to \mathbb{R}$, on a l'équivalence :

$$(f \text{ est dérivable en } a) \iff \left(\begin{array}{c} f \text{ admet un DL d'ordre 1 en } a : \\ f(a+x) \underset{x\to 0}{=} \lambda_0 + \lambda_1 x + o(x)\end{array}\right)$$

et dans ce cas, on a $f(a) = \lambda_0$ et $f'(a) = \lambda_1$.

Démonstration. Si f est dérivable en a, alors :

$$\frac{f(a+x)-f(a)}{x} \underset{x\to 0}{=} f'(a) + o(1) \qquad \begin{array}{ll}\text{donc} & f(a+x) - f(a) \underset{x\to 0}{=} f'(a).x + o(x) \\ \text{donc} & f(a+x) \underset{x\to 0}{=} f(a) + f'(a).x + o(x) \qquad \underline{\text{ok}}\end{array}$$

Réciproquement, si $f(a+x) \underset{x\to 0}{=} \lambda_0 + \lambda_1 x + o(x)$ alors en prenant $x = 0$, on trouve $\lambda_0 = f(a)$.
D'où :

$$\begin{array}{lll} f(a+x) \underset{x\to 0}{=} f(a) + \lambda_1 x + o(x) & \text{donc} & f(a+x) - f(a) \underset{x\to 0}{=} \lambda_1 x + o(x) \\ & \text{donc} & \dfrac{f(a+x)-f(a)}{x} \underset{x\to 0}{=} \lambda_1 + o(1) \\ & \text{donc} & f \text{ est dérivable en } a \text{ et } f'(a) = \lambda_1 \end{array}$$

□

Théorème (Unicité d'un DL)**.**
f ne peut pas admettre deux $\mathrm{DL}_n(a)$ différents.
Autrement dit, s'il existe des réels $(\lambda_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ et $(\mu_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ tels que

$$\lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \cdots + \lambda_n x^n + o(x^n) \underset{x\to 0}{=} \mu_0 + \mu_1 x + \mu_2 x^2 + \cdots + \mu_n x^n + o(x^n)$$

alors $\forall i \in [\![0,n]\!]$, $\lambda_i = \mu_i$.

Démonstration. Par l'absurde : si ce n'est pas le cas, on considère p le plus petit indice $i \in [\![0, n]\!]$ tel que $\lambda_i \neq \mu_i$. On a donc :

$$\lambda_p x^p + \lambda_{p+1} x^{p+1} + \cdots + \lambda_n x^n \underset{x\to 0}{=} \mu_p x^p + \mu_{p+1} x^{p+1} + \cdots + \mu_n x^n + o(x^n)$$

Remarque : on a passé l'un des $o(x^n)$ de l'autre côté de l'égalité et $o(x^n) - o(x^n) = o(x^n)$.
On divise par x^p, puis on passe à la limite $x \to 0$:

$$\lambda_p + \underbrace{\lambda_{p+1} x + \cdots + \lambda_n x^{n-p}}_{\underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0} \underset{x\to 0}{=} \mu_p + \underbrace{\mu_{p+1} x + \cdots + \mu_n x^{n-p} + o(x^{n-p})}_{\underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0}$$

D'où $\lambda_p = \mu_p$: contradiction. □

Corollaire ($\mathrm{DL}_n(0)$ d'une fonction paire/impaire)**.**
Si une fonction paire (resp. impaire) f admet un $DL_n(0)$, la partie régulière de ce DL ne contient que des monômes de degré pairs (resp. impairs).

Démonstration. (pour f paire)
Si $f(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \lambda_k x^k + o(x^n)$ alors $f(-x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \lambda_k (-x)^k + o(x^n) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \lambda_k x^k + o(x^n)$.
Or : $f(x) = f(-x)$. Donc par identification des coefficients (unicité d'un DL), pour tous les k impairs, on a $\lambda_k = -\lambda_k$, donc $\lambda_k = 0$. □

Théorème ("Primitive" d'un DL)**.**
Si une fonction continue f admet un $DL_n(a)$:

$$f(a+x) \underset{x\to 0}{=} \lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \cdots + \lambda_n x^n + o(x^n)$$

alors toute primitive F de f admet le DL d'ordre $n+1$ en a suivant :

$$F(a+x) \underset{x\to 0}{=} F(a) + \lambda_0 x + \lambda_1 \frac{x^2}{2} + \lambda_2 \frac{x^3}{3} + \cdots + \lambda_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1})$$

NB : la démonstration est admise à ce stade de l'année (car nécessite le chapitre sur les intégrales).

Exemples d'application :

- Obtenir le DL en 0 de tan en utilisant le fait que $\tan' = 1 + \tan^2$.
  Comme tan est dérivable en 0 avec $\begin{cases} \tan(0) = 0 \\ \tan'(0) = 1 \end{cases}$, on peut partir de $\tan(x) = x + o(x)$. De plus, tan est impaire, donc le terme en x^2 est nul.
  Donc $\boxed{\tan(x) = x + o(x^2)}$

  On écrit alors :

$$\tan'(x) = 1 + \tan^2(x) = 1 + \big(x + o(x^2)\big)^2 = 1 + x^2 + 2x o(x^2) + o(x^4) = 1 + x^2 + o(x^3)$$

  On intègre ce DL : $\tan(x) = \underbrace{\tan(0)}_{=0} + x + \frac{x^3}{3} + o(x^4) = \boxed{x + \frac{x^3}{3} + o(x^4)}$

  Puis on recommence :

$$\tan'(x) = 1 + \tan^2(x) = 1 + \left(x + \frac{x^3}{3} + o(x^4)\right)^2 = 1 + x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^5)$$

On intègre ce DL : $\tan(x) = \underbrace{\tan(0)}_{=0} + x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{5}x^5 + o(x^6) = \boxed{x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o(x^6)}$

etc.

▶ Obtenir le DL à tout ordre en 0 de Arctan. On part de :

$$\begin{aligned}\text{Arctan}'(x) = \frac{1}{1+x^2} &= \frac{1}{1-(-x^2)} \\ &\underset{x\to 0}{=} 1 + (-x^2) + (-x^2)^2 + \cdots + (-x^2)^n + o\left((-x^2)^n\right) \\ &\underset{x\to 0}{=} 1 - x^2 + x^4 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + o(x^{2n})\end{aligned}$$

On primitive ce DL pour obtenir :

$$\text{Arctan}(x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1})$$

et comme Arctan est impaire, le terme en x^{2n+2} est nul, de sorte qu'il ne coûte rien d'aller à l'ordre suivant et obtenir :

$$\text{Arctan}(x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \boxed{o(x^{2n+2})}$$

3.4 Étude d'extrema

Remarque. *Si l'on suppose que f admet en un point a intérieur de I un extremum local ou global, et un $DL_1(a)$: $f(a+x) \underset{x\to 0}{=} \lambda_0 + \lambda_1 x + o(x)$, alors $\lambda_1 = 0$.*

En effet, l'existence d'un $DL_1(a)$ entraîne la dérivabilité de f en a et donc $f'(a) = \lambda_1 = 0$ car a est un point d'extremum.

Proposition. *On suppose que f admet un $DL_2(a)$ avec $a \in I$ de la forme :*

$$f(a+x) \underset{x\to 0}{=} f(a) + \lambda x^2 + o(x^2) \quad \textit{avec} \quad \lambda \neq 0 \qquad (*)$$

Alors :

- *si $\lambda > 0$, la fonction f admet un minimum local en a ;*
- *si $\lambda < 0$, la fonction f admet un maximum local en a.*

Démonstration. Il s'agit de déterminer si on a $f(t) \geqslant f(a)$ au voisinage de a (cas d'un minimum local) ou $f(t) \leqslant f(a)$ (cas d'un maximum local). Tout se ramène donc à déterminer le signe de $f(t) - f(a)$ au voisinage de a, c'est-à-dire le signe de $f(a+x) - f(a)$ au voisinage de 0. Or, avec $(*)$, on a :

$$f(a+x) - f(a) \underset{x\to 0}{=} \lambda x^2 + o(x^2)$$

donc $\boxed{f(a+x) - f(a) \underset{x\to 0}{\sim} \lambda x^2}$. Par théorème, $f(a+x) - f(a)$ a au voisinage de a le **même signe** que λx^2. De là :

- si $\lambda > 0$, alors $\lambda x^2 > 0$ au voisinage de 0 (pour $x \neq 0$), donc $f(a+x) - f(a) > 0$, et donc $f(t) > f(a)$ pour t appartenant à un voisinage de a (pour $t \neq a$), avec bien sûr égalité lorsque $t = a$. Donc $f(t) \geqslant f(a)$ au voisinage de a ; f possède un minimum local en a.
- Symétriquement, si $\lambda < 0$, f possède un maximum local en a.

□

Remarque. *Si de plus $f \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{R})$, on sait par la formule de Taylor-Young que cette constante λ vaut $\frac{f''(a)}{2}$. Donc f admet :*

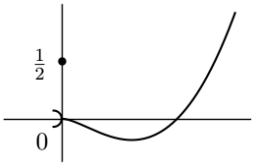
- *un minimum local en a si $f''(a) > 0$;*
- *un maximum local en a si $f''(a) < 0$.*

4 Prolongement de fonctions

Vocabulaire. *De façon générale,* ***prolonger*** *une fonction signifie la définir en un (ou plusieurs) points en lesquels elle n'était initialement pas définie. Il s'agit donc d'un acte arbitraire.*

Exemple : un prolongement possible de $g : \left| \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2\ln(x) \end{array} \right.$ en 0 est

$$\tilde{g} : \left| \begin{array}{ccc} [0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} x^2\ln(x) & \text{si } x>0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } x=0 \end{cases} \end{array} \right.$$



Un petit abus fréquent consiste à nommer la nouvelle fonction $\tilde{g}$ avec le même nom que l'ancienne (g dans cet exemple). On a donc **posé** : $g(0) := \frac{1}{2}$.

4.1 Prolongement par continuité

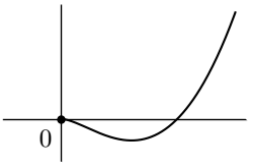
Définition. *Soit I un intervalle, $a \in I$ et f une fonction réelle définie sur $I \setminus \{a\}$.*
Si f admet une limite finie en a : $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell \in \mathbb{R}$,
alors il est possible de prolonger l'ensemble de définition de f à I de sorte que f soit continue en a, en posant $f(a) := \ell$.
Cet acte s'appelle un ***prolongement par continuité****.*

Remarque. *Montrer que $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell \in \mathbb{R}$ est équivalent à obtenir le $DL_0(a)$: $f(x) \underset{x\to a}{=} \ell + o(1)$.*

Exemples :

▶ Le seul prolongement par continuité possible de $g : \left| \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2\ln(x) \end{array} \right.$ en 0 est

$$\hat{g} : \left| \begin{array}{ccc} [0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} x^2\ln(x) & \text{si } x>0 \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases} \end{array} \right.$$



▶ $f_1 : x \mapsto \dfrac{x}{e^{2x}-1}$ est définie et $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$.
Prolongeable par continuité en 0 ?
On a $e^{2x} \underset{x\to 0}{=} 1+2x+o(x)$ donc $f_1(x) \underset{x\to 0}{=} \dfrac{x}{2x+o(x)} = \dfrac{1}{2+o(1)} = \dfrac{1}{2} + o(1)$.
On peut donc prolonger f_1 par continuité en 0 en posant $f_1(0) := \dfrac{1}{2}$. On note également ce prolongement f_1.

$$f_1 : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \frac{x}{e^{2x}-1} & \text{si} \quad x\neq 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si} \quad x=0 \end{cases} \end{array} \right.$$

▶ $f_2 : x \mapsto x^x = e^{x\ln x}$ est définie et $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$.
Prolongeable par continuité en 0 ?
On a $x\ln x \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0^-$ donc $f_2(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} 1^-$.
On peut donc prolonger f_2 par continuité en 0 en posant $f_2(0) := 1$. On note également ce prolongement f_2.

$$f_2 : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} x^x & \text{si} \quad x>0 \\ 1 & \text{si} \quad x=0 \end{cases} \end{array} \right.$$

4.2 Étude de la dérivabilité en a de la fonction prolongée

1ère méthode : revenir à la définition et déterminer la limite de $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ quand $h \to 0$.

NB : cette méthode peut tout à fait s'appliquer aux deux prolongements précédents pour étudier leur dérivabilité en 0 (bon exo).

2ème méthode : Déterminer un $\mathrm{DL}_1(a)$ pour utiliser le théorème suivant, que l'on a déjà vu :

Théorème (lien DL - dérivabilité)**.**
Si $a \in I$ et $f : I \to \mathbb{R}$, on a l'équivalence :

$$(f \text{ est dérivable en } a) \iff \left(\begin{array}{c} f \text{ admet un DL d'ordre } 1 \text{ en } a : \\ f(a+x) \underset{x\to 0}{=} \lambda_0 + \lambda_1 x + o(x) \end{array} \right)$$

et dans ce cas, on a $f(a) = \lambda_0$ et $f'(a) = \lambda_1$.

Exemple de f_1. Revenons à la fonction :

$$f_1 : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \frac{x}{e^{2x}-1} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si} \quad x = 0 \end{cases} \end{array} \right.$$

Lorsque $x \to 0$ ($x \neq 0$) on a :

$$e^{2x} = 1 + 2x + \frac{(2x)^2}{2} + o(x^2) = 1 + 2x + 2x^2 + o(x^2)$$

Donc

$$f_1(x) = \frac{x}{2x + 2x^2 + o(x^2)} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1 + x + o(x)}$$

On applique alors $\frac{1}{1-X} = 1 + X + o(X)$ à $X = -x + o(x)$ (qui tend bien vers 0) pour obtenir :

$$f_1(x) = \frac{1}{2}\big(1 - (x + o(x)) + o(x)\big) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x + o(x)$$

Cette égalité est également vérifiée en $x = 0$, puisqu'elle donne $f(0) = \frac{1}{2}$. Il s'agit d'un $\mathrm{DL}_1(0)$, donc par théorème, f_1 est dérivable en 0 et $f_1'(0) = \frac{-1}{2}$.

Remarque. *Ce $DL_1(0)$, pour $x \neq 0$, aurait aussi pu servir dès le départ pour prolonger f_1 par continuité en 0 puisqu'il montre que $f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{1}{2}$.*

3ème méthode : Utiliser le théorème suivant :

Théorème (de la limite de la dérivée)**.**
Soit f une fonction $\left| \begin{array}{l} \text{continue sur } I \text{ (donc y compris en } a) \\ \text{dérivable sur } I \setminus \{a\}. \end{array} \right.$
Si *$f'(x)$ admet une limite ℓ (finie ou infinie) quand $x \to a$,*
Alors *l'accroissement $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ admet la **même limite** ℓ quand $x \to a$,*
et par conséquent :

- *si ℓ est fini, f est dérivable en a et $\boxed{f'(a) = \ell}$*
- *si $\ell = +\infty$ ou $-\infty$, f n'est pas dérivable en a et son graphe y admet une tangente verticale.*

Démonstration. Plaçons-nous dans les hypothèses du théorème et supposons que $f'(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell \in \overline{\mathbb{R}}$. On remarque que pour tout $x \in I \setminus a$:

- f est continue sur $[a, x]$;
- f est dérivable sur $]a, x[$;

donc par l'égalité des accroissements finis, il existe $c_x \in]a, x[$ tel que :

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(c_x)$$

Par construction, on a $c_x \in]a, x[$, donc par le théorème des gendarmes, $c_x \xrightarrow[x\to a]{} a$. Or, $f'(t) \xrightarrow[t\to a]{} \ell$, donc par composition de limite, $f'(c_x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$.

Finalement, cela montre bien que $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \xrightarrow[x\to a]{} \ell$. □

Remarque. *Si ℓ est fini, on montre à la fois que f est dérivable en a et que sa dérivée f' est continue en a.*

Exemples :

▶ Revenons à la fonction :

$$f_1 : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \frac{x}{e^{2x}-1} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si} \quad x = 0 \end{cases} \end{array} \right.$$

que l'on sait continue sur $\mathbb{R}$. Elle est également $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$, par quotient de fonctions $\mathcal{C}^\infty$.

f_1 est donc dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $\forall x \neq 0 \quad f_1'(x) = \dfrac{(e^{2x} - 1) - x \times 2e^{2x}}{(e^{2x} - 1)^2}$

Limite quand $x \to 0$?

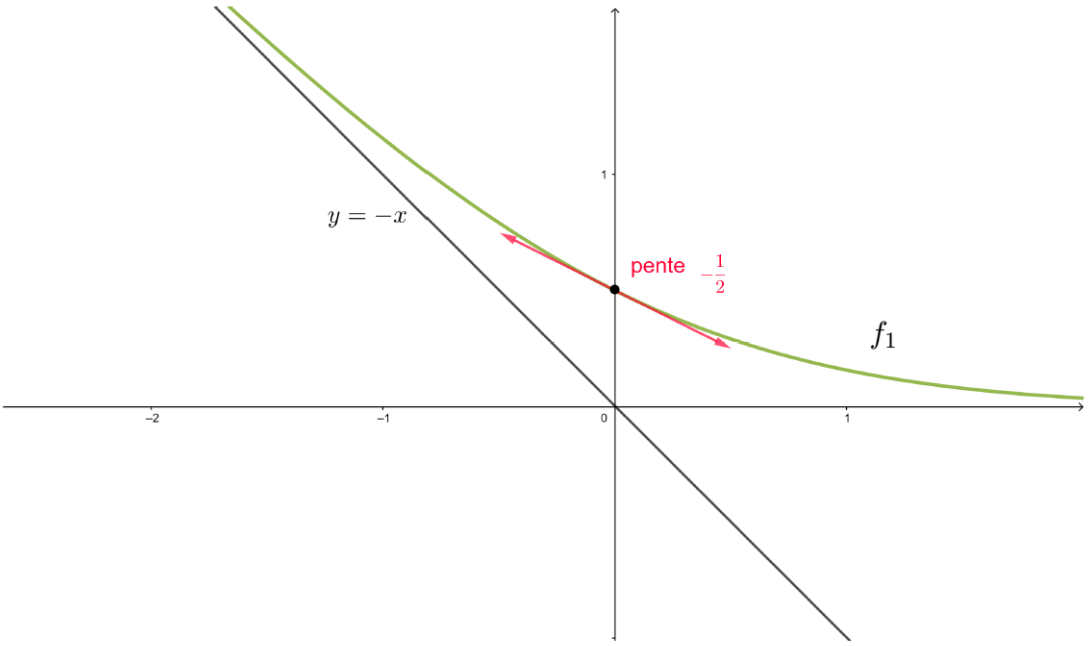
• **équivalent du dénominateur :** $e^{2x} = 1 + 2x + o(x)$ donc $e^{2x} - 1 \sim 2x$ donc $(e^{2x} - 1)^2 \sim 4x^2$.

• **équivalent du numérateur :**
$$\begin{aligned}(e^{2x} - 1) - 2xe^{2x} &= 2x + \frac{(2x)^2}{2} + o(x^2) - 2x(1 + 2x + o(x)) \\ &= 2x^2 - 4x^2 + o(x^2) \\ &= -2x^2 + o(x^2) \sim -2x^2.\end{aligned}$$

On a donc

$$f_1'(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{-2x^2}{4x^2} = \frac{-1}{2} \quad \text{et donc} \quad f_1'(x) \xrightarrow[x\to 0]{} -\frac{1}{2}$$

Par le théorème de la limite de la dérivée, f_1 est dérivable en 0 et $f_1'(0) = -\frac{1}{2}$. On a montré au passage que sa dérivée est continue en 0 (et on la sait continue ailleurs), donc f_1 est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.



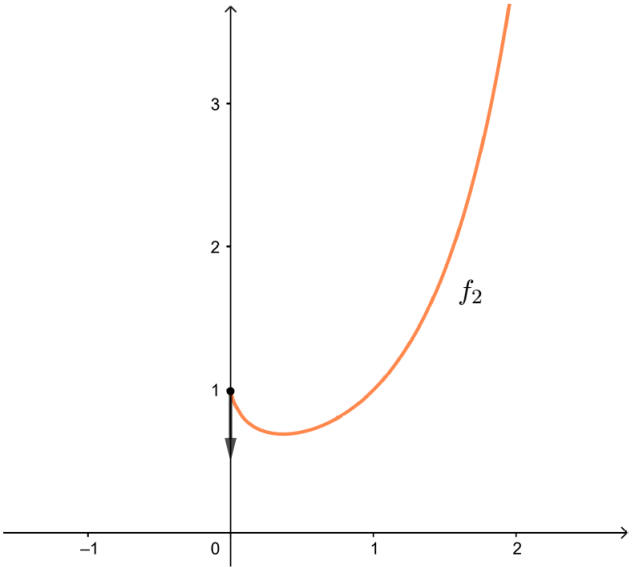
▶ Revenons à la fonction

$$f_2 : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} x^x & \text{si} \quad x > 0 \\ 1 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases} \end{array} \right.$$

que l'on sait continue sur $[0, +\infty[$. Elle est aussi $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$, par produit et composition de fonctions $\mathcal{C}^\infty$.
f_2 est en particulier dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x > 0$:

$$f_2'(x) = (\ln x + x \times \frac{1}{x}) e^{x \ln x} = (1 + \ln x) e^{x \ln x}$$

Limite quand $x \to 0^+$?
• $x \ln x \to 0$ donc $e^{x \ln x} \to 1$.
• $1 + \ln x \to -\infty$
Donc $f_2'(x) \xrightarrow[x \to 0^+]{} -\infty$.
Par le théorème de la limite de la dérivée, f_2 n'est donc pas dérivable en 0 et son graphe admet une tangente verticale.



Cf exo 19